Roll No. ....

233111

S–249

B. A./B. Sc. (Third Semester)

EXAMINATION, 2021-22

MATHEMATICS

(Real Analysis)

(SOS/Maths/DSC—003)

Time : Two Hours] [*Maximum Marks : 70*

नोट : (i) खण्ड 'अ' से किन्हीं पाँच प्रश्नों के और खण्ड 'ब' से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Attempt any *five* questions from Section A and any *three* questions from Section B.

(ii) खण्ड 'अ' के प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों तक सीमित रखें।

Answer each question of Section A within 50 words.

P. T. O.

(iii) अपने सभी प्रश्नों के उत्तर आपको दी गयीं उत्तर पुस्तिका में ही दीजिये। अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका नहीं दी जायेगी।

Limit your answers within the given answer book. Additional answer book (B-Answer book) should not be provided or used.

खण्ड—अ

(Section—A)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

(Objective Type Questions)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Attempt any *five* questions. Each question carries 5 marks.

1. किसी समूह के उच्चक एवं निम्नक उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

   Define supremum and infimum of a set with example.

2. अनंत गणनीय एवं अगणनीय समूहों का उदाहरण दीजिए।

   Give examples of infinite countable and uncountable sets.

3. सिद्ध कीजिए किसी अनुक्रम की सीमा अद्वितीय होती है।

Prove that limit of a sequence is unique.

4. उदाहरण सहित कॉशी अनुक्रम परिभाषित कीजिए।

Define Cauchy's sequence with example.

5. श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\ldots\ldots .$$

Test the convergence of the series :

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\ldots\ldots$$

6. कॉशी रूट टेस्ट की सहायता से, श्रेणी जिसका nवाँ पद निम्न है, की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$u_n=\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)^n$$

Test the convergence of the series by Cauchy's root test whose nth term is :

$$u_n=\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)^n$$

7. उच्च एवं निम्न रीमान समाकलनों को परिभाषित कीजिए।

Define upper and lower Riemann integrals.

P. T. O.

खण्ड—ब

(Section—B)

नोट : किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 15 अंकों का है।

Attempt any *three* questions. Each question carries 15 marks.

8. (अ) किसी समूह का सीमा बिन्दु परिभाषित कीजिए एवं निम्न समुच्चय के सीमा बिन्दु ज्ञात कीजिए : $7\frac{1}{2}$

$$S=\left\{1,-1,\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\ldots\ldots\ldots\right\}$$

Define limit point of a set and find the limit points of the set :

$$S=\left\{1,-1,\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\ldots\ldots\ldots\right\}$$

(ब) बॉल्जानो-वीयरस्ट्रास प्रमेय को उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए : $7\frac{1}{2}$

Explain Bolzano-Weierstrass theorem with example.

9. (अ) यदि :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1.a_2\ldots\ldots\ldots a_n\right)^{\frac{1}{n}}=l$$

If :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

then prove that :

$$\lim_{n\to\infty} (a_1.a_2.........a_n)^{\frac{1}{n}} = l$$

(ब) कॉशी के सीमा पर प्रथम प्रमेय से सिद्ध करो कि :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1 + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}} + ... + n^{\frac{1}{n}}\right] = 1$$

Using Cauchy's first theorem on limits, prove that :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1 + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}} + ... + n^{\frac{1}{n}}\right] = 1$$

10. सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ जो कि : 15

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{4 + 3a_n}{3 + 2a_n}, n \ge 1$$

परिभाषित है, द्वारा अभिसारिता है एवं इसकी सीमा निकालिए।

Prove that sequence $\langle a_n \rangle$ defined by

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{4 + 3a_n}{3 + 2a_n}, n \ge 1$$

is convergent and find its limit.

11. (अ) उस श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए जिसका nवाँ पद है : $7\frac{1}{2}$

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$

Test the convergence of the series whose nth term is :

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$

(ब) निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए : $7\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + ... + \frac{1}{n.2^n} + ...$$

Test the convergence of the series :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + ... + \frac{1}{n.2^n} + ...$$

12. निम्न श्रेणी की अभिसारिता की व्याख्या कीजिए :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.........(2n-1)}{2.4.6........2n} x^n, x > 0$$

Discuss the convergene of the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.........(2n-1)}{2.4.6........2n} x^n, x > 0$$

13. (अ) यदि $f \in R[a,b]$, सिद्ध कीजिए :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

जहाँ कि m एवं M फलन f के निम्नक एवं उच्चक हैं $[a,b]$ में।

If $f \in R[a,b]$, then prove that :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

where m and M are infimum and supremum of f on $[a, b]$.

(ब) यदि $f(x) = x,\ x \in [0,1]$ एवं माना $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ एक $\{0,1\}$ का विभाजन है तो $U\{P, f\}$ एवं $L\{P, f\}$ ज्ञात कीजिए।

If $f(x) = x$, for $x \in [0,1]$ and let $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ be a partition of $[0,1]$, then compute $U[P, f]$ and $L[P, f]$.